施图姆-刘维尔(Sturm-Liouville)问题的级数解法–常点情形

下载地址: https://hyxy.hhu.edu.cn/2022/0830/c8640a239983/page.htm
参考资料：《数学物理方法（第五版）》梁昆淼著

定义0.1 (Sturm-Liouville 本征值问题)**.** 对于给定区域$\mathcal{D}$（可能是$[a,b]$, $[a,+\infty)$, (a,∞), 或者$(-\infty,+\infty)$ 等等）。对于$\mathcal{D}$上的已知的函数$p(x), q(x), w(x)$，其中$p(x)$可微，施图姆-刘维尔本征值问题*(以下简称SL问题)*为求常数λ和函数y满足如下形式的二阶常微分方程：

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y=\lambda w(x)y \tag{1}$$

通过展开式(1)中的微分项并在方程两边同时除以$p(x)$，可以将式(1)转化为如下形式：

$$y''+fy'+gy=0, \tag{2}$$

其中$f=\frac{p'}{p}$，$g=\frac{\lambda w-q}{p}$。

SL理论描述了正则SL问题的本征解的通性，但是对于一个具体的(正则或非正则)SL问题，SL理论无法给出一个具体的数值解。假设我们想求本征解在点$x_0\in\mathcal{D}$ 附近的具体数值，当f,g 都可以看成为复全纯或复半纯函数限制在实数轴上的函数时，我们可以假设本征函数y在x_0 附近有洛朗展开$y=\sum_k a_k(z-x_0)^k$，然后通过比较式(2) 左边逐项的系数得到a_k的递归关系。

1 常点邻域的级数解法

最简单的非平凡情况当然是f,g 都是解析函数时，此时称x_0为SL问题的一个常点。比如当SL问题正则，且p,q,w 都是x_0附近的解析函数时，此时x_0 即为一个常点。为了求得y 在x_0 附近的表达式，假设

$$y(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(x-x_0)^k \tag{3}$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(x-x_0)^k \tag{4}$$

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}g_k(x-x_0)^k \tag{5}$$

首先，我们说明式(3)中不会出现负幂次，即x_0一定也是y的常点。

定理1.1 (常微分方程的解的存在和唯一性定理)**.** 对于定义在实数轴上的n维常微分方程

$$y'=F(x,y(x)),\ y(x)\in\mathbb{R}^n,\ 或y(x)\in\mathbb{C}^n,\ x\in[a,b]\subset\mathbb{R}, \tag{6}$$

假设F是一个关于x连续，且关于y利普希茨*(Lipschitz)*连续，则对于给定的初始值$y(a)=y_0$，y 在区间$[a,b]$上有解且有唯一解。

推论1.2. 当x_0为方程(2)的常点时，式(3)中k不能取负值，即$y(x)$在x_0附近都有限。

证明. 令$Y(x)=(y(x),y'(x))^\top$，则Y满足方程

$$Y'+AY=0, \tag{7}$$

其中$A(x)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ g(x) & f(x)\end{pmatrix}$ 方程(7)满足常微分方程解存在且唯一定理的条件。因此，若y在x_0 附近有一点处有限，则在x_0附近全部有限。因此x_0不可能是y附近的奇点。 □

至此，我们可以假设

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k。 \tag{8}$$

现在将式(8),(4),(5)同时代入方程(2)：

$$\begin{aligned}
&y''+fy'+gy &(9)\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}(x-x_0)^k+[\sum_{r=0}^{\infty}f_r(x-x_0)^r][\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)a_{s+1}(x-x_0)^s]\\
&+[\sum_{r=0}^{\infty}g_r(x-x_0)^r][\sum_{s=0}^{\infty}a_s(x-x_0)^s] &(10)\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{(k+2)(k+1)a_{k+2}+\sum_{r+s=k}(s+1)f_ra_{s+1}+\sum_{r+s=k}g_ra_s\Big\}(x-x_0)^k &(11)
\end{aligned}$$

上式必须为0函数。由此我们得到以下关于a_k 的递归公式：

$$\begin{aligned}
&\text{k=0}\Longrightarrow 2a_2+\Big\{f_0a_1\Big\}+\Big\{g_0a_0\Big\}=0 &(12)\\
&\text{k=1}\Longrightarrow 6a_3+\Big\{2f_0a_2+f_1a_1\Big\}+\Big\{g_1a_0+g_0a_1\Big\}=0 &(13)\\
&\text{k=2}\Longrightarrow 12a_4+\Big\{3f_0a_3+2f_1a_2+f_2a_1\Big\}+\Big\{g_2a_0+g_1a_1+g_0a_2\Big\}=0 &(14)\\
&\vdots &(15)
\end{aligned}$$

因此，对于给定的a_0,a_1，后面的系数$a_2,\ldots$都可以唯一地确定。注意，$a_0=y(x_0),a_1=y'(x_0)$，这和常微分方程的解的存在唯一性定理吻合。

例1.1 (球面上的拉普拉斯算子的本征解问题和勒让德(Legendre)函数)**.** 已知在球坐标系(θ,ϕ)下，球面上的拉普拉斯算子可以写为

$$\begin{aligned}
\Delta u=&\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\phi^2}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big) &(16)\\
=&\frac{u_{\phi\phi}}{\sin^2\theta}+\frac{(u_\theta\sin\theta)_\theta}{\sin\theta}, &(17)
\end{aligned}$$

其中$\theta \in [0, \pi]$代表球表面的纬度($\theta = 0$代表北极)，$\phi \in [0, 2\pi]$代表球表面的经度。

本例题的目标是求解以下本征值问题：

$$-\Delta u = \lambda u \tag{18}$$

注意式(18) 和SL问题有类似的形式，但SL问题是针对常微分方程定义，而这里的拉普拉斯算子给出的是偏微分方程。但是在特殊的假设下，我们可以将方程(18)转化为一个SL问题。这里我们先假设$u = u(\theta)$，即u和ϕ无关。于是结合式(18)和式(17)，得到以下方程：

$$\frac{d(\sin\theta \frac{du}{d\theta})}{d\theta} = -\lambda u \sin\theta \tag{19}$$

此时式(19) 已经是SL问题的形式，等式两边同时除以$\sin\theta$后得到

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{du}{d\theta}\cot\theta = -\lambda u。\tag{20}$$

$\cot\theta$在$\theta = \frac{\pi}{2}$处有泰勒展开(即洛朗级数)，由此我们可以得到以下形式的级数解：

$$u(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\theta - \frac{\pi}{2})^k。\tag{21}$$

式(21)中a_k的值我们留给读者计算。这里我们介绍，可以通过变量替换从式(19)推出u关于$t = \cos\theta$在$t = 0$处的展开。此时得到的展开式和勒让德多项式有相同的表达式。

做变量替换：$t = \cos\theta$，则

$$dt = -\sin\theta d\theta \tag{22}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{d}{d\theta} = -\sin\theta\frac{d}{dt} \tag{23}$$

于是方程(19) 在新变量t下可以写为（此时θ可以看成关于t的函数）：

$$-\sin\theta\frac{d(-\sin^2\theta\frac{du}{dt})}{dt} = -\lambda u \sin\theta, \tag{24}$$

即:

$$\frac{d[(1-t^2)\frac{du}{dt}]}{dt} = -\lambda u \tag{25}$$

此时我们得到关于变量t的SL方程。注意这个方程不是正则的SL方程。将其展开化简得到：

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{2t}{1-t^2}\frac{du}{dt} + \frac{\lambda}{1-t^2}u = 0 \tag{26}$$

令$f(t)=\frac{-2t}{1-t^2}$，$g(t)=\frac{\lambda}{1-t^2}$，他们有如下泰勒展开(洛朗级数):

$$f(t)=-2t\sum_{k=0}^{\infty}t^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}-2t^{2k+1} \tag{27}$$

$$g(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda t^{2k} \tag{28}$$

即$f_{2k}=0$，$f_{2k+1}=-2$，$g_{2k}=\lambda$，$g_{2k+1}=0$。于是有:

$$\begin{aligned}2n(2n-1)a_{2n}=&-\Big\{(2n-1)f_0a_{2n-1}+(2n-2)f_1a_{2n-2}+...+f_{2n-2}a_1\Big\}\\&-\Big\{g_{2n-2}a_0+g_{2n-1}a_1+...+g_0a_{2n-2}\Big\} &(29)\\=&\Big\{2\sum_{k=1}^{n-1}2ka_{2k}\Big\}-\Big\{\lambda\sum_{k=0}^{n-1}a_{2k}\Big\} &(30)\\=&\sum_{k=0}^{n-1}(4k-\lambda)a_{2k} &(31)\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}(2n+1)2na_{2n+1}=&-\Big\{2nf_0a_{2n}+(2n-1)f_1a_{2n-1}+...+f_{2n-1}a_1\Big\}\\&-\Big\{g_{2n-1}a_0+g_{2n-2}a_1+...+g_0a_{2n-1}\Big\} &(32)\\=&2\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)a_{2k+1}-\lambda\sum_{k=0}^{n-1}a_{2k+1} &(33)\\=&\sum_{k=0}^{n-1}(4k+2-\lambda)a_{2k+1} &(34)\end{aligned}$$

为了进一步求得a_n的具体表达式，将式(31) 中的n换成$n-1$，有

$$\begin{aligned}(2n-2)(2n-3)a_{2n-2}=&\sum_{k=0}^{n-2}(4k-\lambda)a_{2k} &(35)\\=&2n(2n-1)a_{2n}-(4n-4-\lambda)a_{2n-2} &(36)\end{aligned}$$

于是

$$a_{2n}=\frac{(2n-1)(2n-2)-\lambda}{2n(2n-1)}a_{2n-2} \tag{37}$$

用同样的方法可得:

$$a_{2n+1}=\frac{2n(2n-1)-\lambda}{(2n+1)2n}a_{2n-1} \tag{38}$$

式(37)和式(38)可以统一写为：

$$a_k = \frac{(k-1)(k-2)-\lambda}{k(k-1)} a_{k-2} \tag{39}$$

式(39)表明，对于任何给定的a_0、a_1 以及λ，都可以递归地推导出所有的系数。那么是不是所有的实数λ都可以作为方程(18) 的本征值？ *SL*理论表明，对于正则的*SL*问题，其本征值一定是离散的且趋于无穷大。球面上的拉普拉斯算子也是一个“正则”的算子。方程(25)看起来不是正则的是因为我们选取的坐标系的原因。

为了方便讨论，我们如下定义u_0和u_1*:*

$$u_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_{2k} t^{2k} \tag{40}$$

$$u_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_{2k+1} t^{2k+1}, \tag{41}$$

其中$\tilde{a}_{2k}$和$\tilde{a}_{2k+1}$分别由初始条件$\tilde{a}_0 = 1$和$\tilde{a}_1 = 1$确定。此时对于$u = \sum_k a_k t^k$，可以很方便地写成$u = a_0 u_0 + a_1 u_1$。

注意，尽管对于给定的λ, a_0, a_1,可以递归地算出所有a_k的值，但这不代表级数$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$可以定义一个$[-1, 1]$上的函数。另外，由于$t = \pm 1$分别对应球面的南北极，而南北极对一个球面来说没有什么特殊，因此我们还至少得要求级数函数$u(t) = \sum_k a_k t^k$满足极限$\lim\limits_{t\to\pm 1} u(t)$ 存在且都有限。

为了讨论清楚这个问题，我们将系数a_k的一些性质列举如下：

(A1), 对于任何固定的λ，如果$a_0 a_1 \neq 0$且对任意的k，$\lambda \neq (k-1)(k-2)$，则$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k-2}} = 1$*;*

(A2), 对于任意固定的λ*,* 存在M，使得对任意的$k > M$,$|a_k| \leq |a_{k-2}|$

(A3), 对于任意固定的λ，存在数M*,* 使得对任意的$k > M$*,* a_{2k}的符号都一致*,* a_{2k+1}的符号也都一致，但有可能a_{2k}和a_{2k+1}的符号不一致；

(A4), 如果$a_0 a_1 \neq 0$且对任意的k，$\lambda \neq (k-1)(k-2)$，则$\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$。

其中*(A1)*容易证明，*(A2)*、*(A3)*、*(A)*都容易由*(A1)*推导得出。性质*(A3)*说明级数$\sum_k a_k t^k$ 的收敛半径为*1*。因此当$-1 < t < 1$时，级数函数$u(t)$一定绝对收敛。性质*(A3)*说明：

$$\lim_{t\to\pm 1} u_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_{2k} \tag{42}$$

$$\lim_{t\to\pm 1} u_1(t) = \pm \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_{2k+1} \tag{43}$$

因此，级数函数u_0（或u_1）能够从$(-1,1)$扩充到整个闭区间$[-1,1]$，当且仅当$\sum_k \tilde{a}_{2k}$收敛（或$\sum_k \tilde{a}_{2k+1}$收敛）。

性质*(A2)*表明，在一般情形下，$|a_k|$的绝对值是隔项递减的。但是这不代表$\sum_k a_k$一定收敛或发散。单调递减的数列之和收敛或发散都是有可能的，比如$\sum_{k>0}\frac{1}{k}$发散而$\sum_{k>0}\frac{1}{k^2}$收敛。因此，为了搞清楚到底它发散还是收敛，我们还需要对$|a_k|$递减的"速度"有个估计。为此，我们将式(39)重新写为：

$$ka_k = (k-2)a_{k-2}[1-\frac{\lambda}{(k-1)(k-2)}] \tag{44}$$

可以证明，对于固定的λ，存在$M>0$,使得对任意的$k>M$，有$0<1-\frac{\lambda}{(k-1)(k-2)}<1$。且

$$\prod_{k=M+1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{(k-1)(k-2)}\right)\to c>0 \tag{45}$$

这说明a_k递减的速度和$1/k$是一个量级。因此如果所有的$\tilde{a}_{2k}$都不为*0*，则级数$\sum_k \tilde{a}_{2k}$必定发散。对$\tilde{a}_{2k+1}$我们有相同的结论。

因此，若要u_0和u_1扩张到整个闭区间$[-1,1]$，必须要存在一个整数$k\geq 2$，使得$\lambda=(k-1)(k-2)$。此时u_0和u_1中有一个是关于$t=\cos\theta$的多项式，且（当然）可以扩张到$[-1,1]$。这个多项式被称为$(k-2)$阶勒让德多项式，记为P_{k-2}。

最后，是否有可能u_0和u_1都不在$t=\pm1$处收敛，但存在一个u_0和u_1的线性组合$u=a_0u_0+a_1u_1$,使得u可以扩张到$t=\pm1$？假设如此。但性质*(A3)*表明，要么在$t=1$附近，要么在$t=-1$附近，当k足够大时$a_{2k}t^{2k}$和$a_{2k+1}t^{2k+1}$的符号一定一致，如果此时u可以扩张到$t=1$或$t=-1$，则u_0和u_1也必定可以扩张到$t=1$或$t=-1$,和前面推出的结论矛盾。

综上所述，球面上的拉普拉斯本征值问题在假设$u=u(\theta)$的前提下，其本征值$\lambda_n=n(n+1)$，对应的本征函数为勒让德多项式$P_n(\cos\theta)$。

还没结束！

注意到我们求出的本征解$P_n(\cos\theta)$依赖于坐标系的选取，而球面坐标系(θ,ϕ)本质上由穿过球心的一条极轴决定。在之前的推导中，我们假设极轴是贯穿南北极的那条线。但很明显我们也可以选取其它极轴。假如我们选取了另一条极轴得到一个新的球面坐标系(θ_1,ϕ_1)，我们可以对相同的本征值λ_n 得到一个新的本征函数$P_n(\cos\theta_1)$。这也表示球面上的拉普拉斯算子的本征函数空间并不一定是一维的，这和正则SL问题的情况不同。对于由两个不同球面坐标系得到的两个本征函数$P_n(\cos\theta_1)$ 和$P_n(\cos\theta)$，很明显它们的任意线性组合也一定属于相同的本征值。

因此我们考虑，对初始的极轴朝某一个方向做一个小的扰动，记为δ，得到新的极轴和新的球面坐标系(θ_1,ϕ_1)，以及新的本征函数$P_n(\cos\theta_1)$。然后考虑

$$Q(\cos\theta)=\lim_{\delta\to0}\frac{P_n(\cos\theta_1)-P_n(\cos\theta)}{\delta} \tag{46}$$

则$Q(\cos\theta)$也一定是一个本征值为λ_n的本征函数。不难看出，初始极轴被扰动的所有可能方向的集合构成球面北极处的切平面，因此有两个自由度。这里我们分别考虑

- 扰动*1*：方向为(x,z)平面朝着x轴的负方向，扰动角度记为α。
- 扰动*2*：方向为(y,z)平面朝着y轴的正方向，扰动角度记为β

对于扰动*1*，在原坐标系下的(θ,ϕ)在扰动后的球面坐标系中的坐标$(\theta_1,\phi_1)=(\theta_1(\alpha),\phi_1(\alpha))$满足

$$\begin{pmatrix}\sin\theta_1\cos\phi_1\\ \sin\theta_1\sin\phi_1\\ \cos\theta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix} \tag{47}$$

其中第三行为：

$$\cos\theta_1=-\sin\alpha\sin\theta\cos\phi+\cos\alpha\cos\theta \tag{48}$$

因此

$$d(\cos\theta_1)\Big|_{\alpha=0}=-sin\theta d\theta_1=-\cos\alpha\Big|_{\alpha=0}\sin\theta\cos\phi d\alpha-\sin\alpha\Big|_{\alpha=0}\cos\theta d\alpha \tag{49}$$

$$\Longrightarrow\frac{d\theta_1}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}=\cos\phi \tag{50}$$

相应的，由式(47)第二行可以计算出：

$$\frac{d\phi_1}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}=-\frac{\sin\phi\cos\theta}{\sin\theta}d\alpha \tag{51}$$

因此

$$\frac{dP_n(\cos\theta_1)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}=P_n'(\cos\theta)(-\sin\theta)\frac{d\theta_1}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}=-\sin\theta P_n'(\cos\theta)\cos\phi \tag{52}$$

对于扰动*2*，在原坐标系下的(θ,ϕ)在扰动后的球面坐标系中的坐标$(\theta_1,\phi_1)=(\theta_1(\beta),\phi_1(\beta))$满足

$$\begin{pmatrix}\sin\theta_1\cos\phi_1\\ \sin\theta_1\sin\phi_1\\ \cos\theta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta\\ 0 & \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix} \tag{53}$$

其中第三行为：

$$\cos\theta_1=\sin\beta\sin\theta\sin\phi+\cos\beta\cos\theta \tag{54}$$

因此

$$d(\cos\theta_1)\Big|_{\beta=0}=-sin\theta d\theta_1=\cos\beta\Big|_{\beta=0}\sin\theta\sin\phi d\beta-\sin\beta\Big|_{\beta=0}\cos\theta d\beta \tag{55}$$

$$\Longrightarrow\frac{d\theta_1}{d\beta}\Big|_{\beta=0}=-\sin\phi \tag{56}$$

相应的，由式(53)第一行可以计算出：

$$\frac{d\phi_1}{d\beta}\Big|_{\alpha=0} = -\frac{\cos\phi\cos\theta}{\sin\theta}d\beta \tag{57}$$

此时

$$\frac{dP_n(\cos\theta_1)}{d\beta}\Big|_{\beta=0} = P_n'(\cos\theta)(-\sin\theta)\frac{d\theta_1}{d\beta}\Big|_{\beta=0} = \sin\theta P_n'(\cos\theta)\sin\phi \tag{58}$$

由此，我们得到另外两个本征解$P_n'\sin\theta\sin\phi$ 和$P_n'\sin\theta\cos\phi$。

这个过程可以继续下去，令$P_n^{(m)} = \frac{d^m P_n}{dx^m}$ 为P_n的m 阶导数。对于扰动*1*，通过直接计算可得*:*

$$\begin{aligned}
&\frac{dP_n^{(m)}\sin^m\theta_1\cos(m\phi_1)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = P_n^{(m+1)}(-sin\theta)\sin^m\theta\cos(m\phi)\frac{d\theta_1}{d\alpha}\\
&+P_n^{(m)}m\sin^{m-1}\theta\cos\theta\cos(m\phi)\frac{d\theta_1}{d\alpha}+P_n^{(m)}\sin^m\theta(-m\sin(m\phi))\frac{d\phi_1}{d\alpha}\\
=&mP_n^{(m)}\sin^{m-1}\theta\cos\theta\cos((m-1)\phi)-P_n^{(m+1)}\sin^{m+1}\theta\cos(m\phi)\cos\phi
\end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{dP_n^{(m)}\sin^m\theta_1\sin(m\phi_1)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = P_n^{(m+1)}(-sin\theta)\sin^m\theta\sin(m\phi)\frac{d\theta_1}{d\alpha}\\
&+P_n^{(m)}m\sin^{m-1}\theta\cos\theta\sin(m\phi)\frac{d\theta_1}{d\alpha}+P_n^{(m)}\sin^m\theta(m\cos(m\phi))\frac{d\phi_1}{d\alpha}\\
=&mP_n^{(m)}\sin^{m-1}\theta\cos\theta\sin((m-1)\phi)-P_n^{(m+1)}\sin^{m+1}\theta\sin(m\phi)\cos\phi
\end{aligned} \tag{60}$$

对于扰动*2*，直接计算可得：

$$\begin{aligned}
&\frac{dP_n^{(m)}\sin^m\theta_1\cos(m\phi_1)}{d\beta}\Big|_{\beta=0} = P_n^{(m+1)}(-sin\theta)\sin^m\theta\cos(m\phi)\frac{d\theta_1}{d\beta}\\
&+P_n^{(m)}m\sin^{m-1}\theta\cos\theta\cos(m\phi)\frac{d\theta_1}{d\beta}+P_n^{(m)}\sin^m\theta(-m\sin(m\phi))\frac{d\phi_1}{d\beta}\\
=&mP_n^{(m)}\sin^{m-1}\theta\cos\theta\sin((m-1)\phi)+P_n^{(m+1)}\sin^{m+1}\theta\cos(m\phi)\sin\phi
\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{dP_n^{(m)}\sin^m\theta_1\sin(m\phi_1)}{d\beta}\Big|_{\beta=0} = P_n^{(m+1)}(-sin\theta)\sin^m\theta\sin(m\phi)\frac{d\theta_1}{d\beta}\\
&+P_n^{(m)}m\sin^{m-1}\theta\cos\theta\sin(m\phi)\frac{d\theta_1}{d\beta}+P_n^{(m)}\sin^m\theta(m\cos(m\phi))\frac{d\phi_1}{d\beta}\\
=&-mP_n^{(m)}\sin^{m-1}\theta\cos\theta\cos((m-1)\phi)+P_n^{(m+1)}\sin^{m+1}\theta\sin(m\phi)\sin\phi
\end{aligned} \tag{62}$$

式(59) + 式(62)，式(60) − 式(61)，表明若$\sin^m\theta P_n^{(m)}\cos m\phi$ 和$\sin^m\theta P_n^{(m)}\sin m\phi$ 是本征解，则$\sin^{m+1}\theta P_n^{(m+1)}\cos(m+1)\phi$ 和$\sin^{m+1}\theta P_n^{(m+1)}\sin(m+1)\phi$ 也是本征解。

因此对任意的n, m，

$$\sin^m\theta P_n^{(m)}(\cos\theta)(A\cos(m\phi)+B\sin(m\phi)) \tag{63}$$

都是对应于λ_n的本征解，其中$P_n^{(m)}$ 代表$\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$。这些也构成所有的本征解的一组基（参看下面的注）。

注1.1. 对于例*1.1*，常见的解法是分离变量，即假设$u = U(\theta)V(\phi)$，然后将其代入(18)，再将得到的方程重写为左边只和θ有关，而右边只和ϕ有关的形式，详见《数学物理方法（第五版）》（梁昆淼著）*9.1*节。在这个问题中采用分离变量法不会漏掉一些非对称解，因为$u(\theta,\phi)$ 必须是关于ϕ的周期函数，而任何$[0,\pi]\times[0,2\pi]$ 上关于ϕ的周期函数都可以写为$\sum_{m\geq 0} A_m(\theta)\cos(m\phi)+B_m(\theta)\sin(m\phi)$的形式。但是这个思路得到的**连带勒让德方程***(associated Legendre equation)*：

$$(1-x^2)U''-2xU'+(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2})U=0 \tag{64}$$

很难像(26)一样通过直接求解得到系数的通项公式。对于方程(64)一般常见的“解法”可以参考《数学物理方法（第五版）》（梁昆淼著）*10.2*节，但这样的解法的关键在于要先“猜出”解的正确形式。但是怎么发现解的正确形式？这对于绝大部分的读者都是很困难的。例*1.1*中通过扰动极坐标的方法，为如何发现解的正确形式提供了一条思路。