施图姆-刘维尔(Sturm-Liouville) 理论

下载地址: https://hyxy.hhu.edu.cn/2022/0830/c8640a239983/page.htm
参考资料: https://www.iitg.ac.in/physics/fac/charu/courses/ph402/SturmLiouville.pdf

定义0.1 (Sturm-Liouville 本征值问题)**.** 对于给定区域$\mathcal{D}$ （可能是$[a,b]$, $[a,+\infty)$, (a,∞), 或者$(-\infty,+\infty)$ 等等）。对于$\mathcal{D}$上的已知的函数$p(x), q(x), w(x)$, 其中$p(x)$可微，施图姆-刘维尔本征值问题*(以下简称SL问题)*为求常数λ和函数y满足如下形式的二阶常微分方程:

$$-\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}x}\Big[p(x)\frac{\mathtt{d}y}{\mathtt{d}x}\Big]+q(x)y=\lambda w(x)y \tag{1}$$

当$w>0$ 时，对于$\mathcal{D}$ 上任意的二次可微函数f，如下定义的算子*(函数到函数的映射)* L 被称为*Sturm-Liouville*算子:

$$L(f)=\frac{1}{w}\Big\{-\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}x}\Big[p(x)\frac{\mathtt{d}f}{\mathtt{d}x}\Big]+qf\Big\} \tag{2}$$

一个完整的求解本征值的问题应该还附带对解在$\mathcal{D}$ 边界上的要求，俗称边界条件。所谓的施图姆-刘维尔理论，即在p,q,w 以及边界条件满足特定条件(以下称之为正则性)时，对SL问题的解所普遍具有的数学性质的描述。

首先我们证明，SL方程左边的部分并不是一个特别特殊的情形。

定理0.1. 对于如下形式的一般二阶常微分方程:

$$fy''+gy'+hy=0, \tag{3}$$

如果$f(x)\neq 0$，则可以将其等价地变换为

$$-(py')'+qy=0 \tag{4}$$

的形式。

证明. 考虑在方程(3) 两边同时乘以函数$m(x)$，m待定，使得存在某个函数F, $mf=F, mg=F'$。然后方程(3) 就可以转化为

$$(Fy')'+mhy=0。 \tag{5}$$

为了确定F，我们发现

$$\frac{mg}{mf}=\frac{F'}{F}=(\ln F)' \tag{6}$$

由此我们得出

$$F(x)=\exp\{\int_a^x\frac{g(t)}{f(t)}dt\} \tag{7}$$

相应的，$m(x)=\frac{1}{f(x)}\exp\{\int_a^x\frac{g(t)}{f(t)}dt\}$ □

1 一个关于（二阶）常微分方程的一般结论

注意对于给定的λ, 方程(1)是一个二阶常微分方程。

定理1.1. 对于任意实数区间$[a,b]$ 上的任意二阶常微分方程:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x), \tag{8}$$

假设其中f,g,h 都是$[a,b]$ 上的连续函数，则对于给定的初始值$y(a) = \alpha$, $y'(a) = \beta$, 方程(8) 在$[a,b]$ 上有唯一解。

证明. 对于方程(8) 的任意满足初始条件的解y, ；定义向量值函数:

$$\theta(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2。 \tag{9}$$

则θ 一定满足如下一阶常微分方程:

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}x}\theta = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -fy' - gy - h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & -f \end{pmatrix}\theta + \begin{pmatrix} 0 \\ -h \end{pmatrix} \tag{10}$$

即

$$\theta' = A\theta + \eta, \tag{11}$$

其中

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g(x) & -f(x) \end{pmatrix}, \quad \eta(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -h(x) \end{pmatrix}。 \tag{12}$$

注意固定初始值$y(a)$ 和$y'(a)$ 等价于固定θ 的初始值。假若方程(8) 对同一个初始值有两个不同的解y_1 和y_2，则相应的有满足同一个方程(11)的θ_1 和θ_2，且$\theta_1(a) = \theta_2(a)$。令$\phi = \theta_1 - \theta_2$, 则$\phi$ 满足:

$$\frac{\mathtt{d}\phi}{\mathtt{d}x} = A\phi \tag{13}$$

$$\phi(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

因此

$$\frac{\mathtt{d}|\phi|^2}{\mathtt{d}x} = 2\phi^\top \frac{\mathtt{d}\phi}{\mathtt{d}x} = 2\phi^\top A\phi \tag{15}$$

由于矩阵值函数A 在$[a,b]$ 连续，因此存在不依赖于x 的常数$m > 0$, 使得对任意的$x \in [a,b]$，$\phi^\top A\phi < \frac{m}{2}|\phi|^2$。因此$|\phi(0)|^2 = 0$ 且$(|\phi|^2)' < m|\phi|^2$。因此

$$(e^{-mx}|\phi(x)|^2)' = e^{-mx}((|\phi|^2)' - m|\phi|^2) < 0。 \tag{16}$$

因此$e^{-mx}|\phi(x)|^2 < e^{-ma}|\phi(0)|^2 = 0$。但这不可能成立，因此方程(8)不存在满足同一初始条件的不同解。 □

推论1.2. 对于方程(1), 假如闭区间$[a_0,b_0]\subset\mathcal{D}$，并且对任意的$x\in[a_0,b_0]$有$p(x)\neq 0$。那么对于一个给定的$\lambda$，方程(1) 的解空间限制在在$[a_0,b_0]$上至多是2维。

注1.1. 对于正则的（下文定义正则性）SL问题以及固定的λ，方程(1)的解空间至多是一维的。但是对于非正则的SL问题，其解空间有可能是2维，但维数不会超过2。

2 正则的(regular)SL问题

定义2.1. 一个SL问题被称为正则的，如果$\mathcal{D}=[a,b]$是一个闭区间，p,q,w,p'都在$\mathcal{D}$上连续，$p,w>0$，并且附带（齐次混合）边界条件：

$$\begin{cases}\alpha_0 y'(a)+\beta_0 y(a) &= 0\\ \alpha_1 y'(b)+\beta_1 y(b) &= 0\end{cases} \tag{17}$$

其中$\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1$ 都是实数，且$\alpha_0^2+\beta_0^2>0$, $\alpha_1^2+\beta_1^2>0$。

正则的SL本征值问题的解有一系列简洁漂亮的数学性质，被称为SL理论。SL理论一般用希尔伯特空间(Hilbert space)这套语言描述。

3 希尔伯特空间(Hilbert space)简介

希尔伯特空间的概念属于泛函分析这个数学分支。这套概念的产生源于对偏微分方程的解的存在性和唯一性的研究。偏微分方程是用来刻画自然界物理状态演变规律的方程。尽管自然界的物理状态始终存在且唯一，但许多物理方程的推导始终存在很明显的人为的假设。因此并不能先验地认为被用来描述自然界规律的偏微分方程的解一定存在且唯一。在很多重要的情形，一个偏微分方程对应于一个算子（参考SL问题对应到SL算子），和这个偏微分方程相关的某个函数空间构成一个有内积的线性空间(即希尔伯特空间)。而希尔伯特空间上的里兹表示定理(Riesz representation theorem)将偏微分方程求解的问题划归为证明之前那个算子在当前希尔伯特空间的度量下连续的问题。

在实际的应用中，一个希尔伯特空间一般是由一些满足特定条件的函数组成的线性空间。但是在希尔伯特空间这个抽象概念的定义中，我们可以暂时'忘记'这个空间由一堆函数组成，而将其想象成一个向量空间。

定义3.1. 一个复数域上的（完备）线性空间$\mathcal{H}$ 被称为希尔伯特空间，如果存在一个（内积）映射：

$$\langle .,.\rangle:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}, \tag{18}$$

使得对任意的$y_1,y_2,y_3,y_4\in\mathcal{H}$, $a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{C}$, 满足：

$\langle y_1,y_2\rangle=\overline{\langle y_2,y_1\rangle}$,

$\langle a_1y_1+a_2y_2,a_3y_3+a_4y_4\rangle = a_1\bar{a}_3\langle y_1,y_3\rangle+a_1\bar{a}_4\langle y_1,y_4\rangle+a_2\bar{a}_3\langle y_2,y_3\rangle+a_2\bar{a}_4\langle y_2,y_4\rangle$,

$\langle y_1, y_1\rangle \geq \mathbf{0}$ ，且等号成立当且仅当$y_1 = 0 \in \mathcal{H}$

注3.1. 这里完备性是拓扑里的概念，而不是指正交基的完备性，感兴趣的同学请自行查阅任何一本网上的免费中文拓扑教材。

定义3.2. 对于任意的$y \in \mathcal{H}$，$\|y\| := \langle y, y\rangle$ 被称为y的模（对应于向量的模的概念）。假设$\mathcal{I}$是一个指标集合（可能有限，也可能无限），如果$\{e_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subset \mathcal{H}$，满足：

(1), 对任意的$i, j \in \mathcal{I}$，有$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$;

(2), 对任意的$y \in \mathcal{H}$，以及任意的$\epsilon > 0$，都存在有限集合$\{e_{i_k}\}_{k=1\dots n}$,以及系数a_{i_k}，使得$\|y - \sum_{k=1}^{n} a_{ike_i}\| \leq \epsilon$。

则称$\{e_i\}_{i\in\mathcal{I}}$为$\mathcal{H}$的一组单位正交基。

例3.1. 令$\tilde{\mathcal{H}} = \Big\{f$是$[0, 2\pi]$上的复值连续函数，且$f(0) = f(2\pi)\Big\}$。对$f, g \in \tilde{\mathcal{H}}$，定义

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f\bar{g}dx。 \tag{19}$$

但是$\tilde{\mathcal{H}}$还不是一个希尔伯特空间，因为$\tilde{\mathcal{H}}$不完备。令$\mathcal{H} = \overline{\tilde{\mathcal{H}}}$，此时$\mathcal{H}$是一个（完备的）希尔伯特空间。也就是说，$\mathcal{H}$中的元素不光有$[0, 2\pi]$上的连续函数，还有$[0, 2\pi]$上的一部分不连续函数。比如阶梯函数

$$h(x) = \begin{cases} 0 \text{ 当} x < \pi, \\ 1 \text{ 当} x \geq \pi。 \end{cases} \tag{20}$$

这些额外的函数h有一个共同特点是，对任意小的$\epsilon > 0$,都存在一个$f \in \tilde{\mathcal{H}}$，满足$\displaystyle\int_0^{2\pi} |h - f|^2 dx < \epsilon$。这些额外的$h$属于$\mathcal{H} \setminus \bar{\tilde{H}}$。这个$\mathcal{H}$通常写为$\mathcal{H} = \Big\{f : \int_0^{2\pi} |f|^2 dx < \infty\Big\}$。$\mathcal{H}$有单位正交基$\{e_k = e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$。

一个$\mathcal{H}$上的线性算子L不是一定要定义在整个希尔伯特空间上。通常L只定义在$\mathcal{H}$ 的一个(稠密)线性子空间上，这个(稠密)线性子空间一般被记为$\mathrm{Dom}(L)$。其中Dom 是domain的缩写，指定义域。

例3.2. 比如对于$\mathcal{H} = \{f : \int_0^1 |f|^2 dx < \infty\}$，对于$f, g \in \mathcal{H}$, 其内积定义为$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f\bar{g}dx$. 考虑$L(f) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$。很显然，$L$ 不可能对所有的连续函数f 都有直接定义，因为存在连续且平方可积，但是不可微的函数。此时$Dom(L) = \{f : \; f \in \mathcal{H}$ 可微且 $\int_0^1 |f'|^2 dx < \infty\}$。$Dom(L)$ 是$\mathcal{H}$ 的稠密子空间，因为任意一个闭区间上的连续函数都可以用一个可微函数任意逼近。在某些情形，线性算子L的定义域可能可以扩张到一个更大的子空间，但这个扩张依赖于$\mathcal{H}$的选取。在本讲义中，我们只选取显而易见的$Dom(L)$。

定义3.3. 一个线性算子$L : Dom(L) \to \mathcal{H}$被称为对称算子，如果对于任意的$y_1, y_2 \in Dom(L)$, 满足:

$$\langle y_1, Ly_2\rangle = \langle Ly_1, y_2\rangle \tag{21}$$

例3.3. 令$\mathcal{H} = \left\{f : \int_{[0,1]^2} |f|^2 < \infty, f\Big|_{\partial[0,1]^2} = 0\right\}$。考虑$L = -\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$。令$Dom(L) = \{f \in \mathcal{H}$且$f$ 2次连续可微$\}$。此时对于$f, g \in Dom(L)$

$$\langle Lf, g\rangle = \int_0^1\int_0^1 (-f_{xx} - f_{yy})\bar{g}dxdy \tag{22}$$

$$= -\int_0^1 f_x\bar{g}\Big|_{(0,y)}^{(1,y)}dy + \int_0^1\int_0^1 f_x\bar{g}_x dxdy - \int_0^1 f_y\bar{g}\Big|_{(x,0)}^{(x,1)}dx + \int_0^1\int_0^1 f_y\bar{g}_y dxdy \tag{23}$$

$$= \int_0^1\int_0^1 f_x\bar{g}_x + f_y\bar{g}_y dxdy \tag{24}$$

因此$\langle Lf, g\rangle = \langle f, Lg\rangle$。

定理3.1. 希尔伯特空间$\mathcal{H}$ 上的对称算子L 的特征值一定是实数。

证明. 设λ为L的一个特征值，且$0 \neq y \in$ Dom(L) 为其对应的一个特征向量。由定义，

$$\bar{\lambda}\langle y, y\rangle = \langle y, \lambda y\rangle = \langle y, Ly\rangle = \langle Ly, y\rangle = \langle \lambda y, y\rangle = \lambda\langle y, y\rangle。\tag{25}$$

由于$\langle y, y\rangle > 0$, 因此$\lambda = \bar{\lambda}$。 □

定理3.2. 若希尔伯特空间$\mathcal{H}$ 上的对称算子L 有两个不同的特征值λ_1 和λ_2，其对应的特征向量y_1，y_2一定正交，即

$$\langle y_1, y_2\rangle = 0 \tag{26}$$

证明. 由定义，

$$\bar{\lambda}_2\langle y_1, y_2\rangle = \langle y_1, \lambda_2 y_2\rangle = \langle y_1, Ly_2\rangle = \langle Ly_1, y_2\rangle = \langle \lambda_1 y_1, y_2\rangle = \lambda_1\langle y_1, y_2\rangle。\tag{27}$$

已证明λ_1, λ_2 都是实数，因此若$\lambda_1 \neq \lambda_2$, 必有$\langle y_1, y_2\rangle = 0$。 □

4 正则SL本征值问题的解的性质

对于正则的SL本征值问题，定义希尔伯特空间

$$\mathcal{H} = \{复值函数y : 满足\int_{\mathcal{D}} w(x)|y(x)|^2 dx < \infty\}。\tag{28}$$

对于$y_1, y_2 \in \mathcal{H}$, 定义其内积为:

$$\langle y_1, y_2\rangle = \int_{\mathcal{D}} w(x) y_1(x) \bar{y}_2(x) dx \tag{29}$$

对于式(2) 定义的L, 我们选取Dom(L)= $\{f \in \mathcal{H}$, 二次可微，且其二阶导数在$\mathcal{D}$上连续$\}$。此时L具有以下性质:

(1) L 是对称算子；从而L 的特征值都是实数，且属于不同特征值的特征向量一定正交。

(2) 假如λ 是L 的特征值，则其对应的特征向量空间一定是一维的，亦即不存在两个线性无关的特征向量对应于同一个特征值。

(3) L 的特征值可以从小到大排列为：$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots \to +\infty$。其对应的特征向量$y_1, y_2, \ldots$. 构成$\mathcal{H}$ 的一组正交基。

(3)' 存在实数M,L的特征值都大于M。

注4.1. 如果$L = -\Delta$ 为拉普拉斯算子，对于合适的边界条件，很容易证明这三条性质，因为其特征向量就是三角函数。对于正则SL算子L, 其第三条性质的数学证明比较复杂，本课程不要求掌握，本讲义只列出大概步骤。这四条性质对一类由偏微分方程衍生的算子也成立（除了每个本征值对应的本征函数空间不一定是一维）。更进一步的，这些结果可以推广到黎曼流形上的偏微分方程的情形。这些理论在计算机视觉(包括海洋学中的相关问题)领域中都有直接的应用。

性质(1)的证明: 对于任意的$y_1, y_2 \in \mathrm{Dom}(L)$, 分部积分两次可得:

$$\begin{aligned}
\langle y_1, Ly_2\rangle &= \int_{\mathcal{D}} y_1 \overline{\frac{1}{w}\{-(py_2')' + qy_2\}} w dx && (30)\\
&= \int_{\mathcal{D}} y_1 \{-(p\bar{y}_2')' + q\bar{y}_2\} dx && (31)\\
&= \int_{\mathcal{D}} -y_1(p\bar{y}_2')' + qy_1\bar{y}_2 dx && (32)\\
&= -\, y_1 p\bar{y}_2'\Big|_a^b + \int_{\mathcal{D}} y_1' p\bar{y}_2' + qy_1\bar{y}_2 dx && (33)\\
&= -\, y_1 p\bar{y}_2'\Big|_a^b + \bar{y}_2 p y_1'\Big|_a^b + \int_{\mathcal{D}} -\bar{y}_2(py_1')' + qy_1\bar{y}_2 dx && (34)\\
&= -\, y_1 p\bar{y}_2'\Big|_a^b + \bar{y}_2 p y_1'\Big|_a^b + \int_{\mathcal{D}} \bar{y}_2\{-(py_1')' + qy_1\} dx && (35)\\
&= -\, y_1 p\bar{y}_2'\Big|_a^b + \bar{y}_2 p y_1'\Big|_a^b + \langle Ly_1, y_2\rangle && (36)\\
&= p(b)\Big[y_1'(b)\bar{y}_2(b) - y_1(b)\bar{y}_2'(b)\Big] - p(a)\Big[y_1'(a)\bar{y}_2(a) - y_1(a)\bar{y}_2'(a)\Big]\\
&\quad + \langle Ly_1, y_2\rangle && (37)
\end{aligned}$$

正则SL问题附带的边界条件可以等价的解读为向量$(y_1(b), y_1'(b))$平行于$(\bar{y}_2(b), \bar{y}_2'(b))$，以及向量$(y_1(a), y_1'(a))$平行于$(\bar{y}_2(a), \bar{y}_2'(a))$。因此式(37) 中头两项为0。
□

性质（2）的证明: 假设λ为正则SL算子L的一个特征值，而y_1, y_2为其两个线性无关的特征向量，即y_1, y_2同时满足

$$-(py')' + qy = \lambda wy \tag{38}$$

以及边界条件

$$\alpha_0 y'(a) + \beta_0 y(a) = 0 \tag{39}$$
$$\alpha_1 y'(b) + \beta_1 y(b) = 0 \tag{40}$$

。 由于$p > 0$, 式(38) 可以展开并在等式两边同时除以$-p$:

$$y'' + \frac{p'}{p}y' + \frac{\lambda w - q}{p}y = 0 \tag{41}$$

式(41)符合定理1.1中的条件，因此对于给定的初值向量$\theta(a) = (y(a), y'(a))^\top$，方程(11)有唯一解。而正则SL问题中的边界条件表明，y_1和y_2对应的初值向量θ_1平行于θ_2，由于方程(11)中的系数和θ无关，因此$\theta_1(x)$始终平行于$\theta_2(x)$,且他们的长度之比始终为常数。因此存在常数c,使得$y_1(x) = cy_2(x)$ 在$\mathcal{D}$ 上成立，和假设矛盾。
□

性质（3）'的证明: 设λ为L的一个本征值，相应的特征函数为y。通过分部积分，推出:

$$\int_{\mathcal{D}} \lambda y\bar{y}dx = \langle y, Ly\rangle \tag{42}$$
$$= \int_{\mathcal{D}} y\Big\{-(p\bar{y}')' + q\bar{y}\Big\}dx \tag{43}$$
$$= -yp\bar{y}'\Big|_a^b + \int_{\mathcal{D}}\Big[]py'\bar{y}' + qy\bar{y}\Big]dx \tag{44}$$

如果在边界上$y = 0$或$y' = 0$,则显然由上式可以推出$\lambda \geq \inf q(x)$。下面处理边界条件是混合齐次的情形，即$\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$都不为0的情形。对于边界一边是混合齐次，而另一边是非混合齐次的情形，请读者自行思考。

对于边界两端都是混合齐次的情形，不妨假设$\alpha_0 = \alpha_1 = 1$。构造一个$\mathcal{D}$ 上的正值函数h，使得$h(x)$在端点a附近和$e^{-\beta_0(x-a)}$吻合，而在端点b附近和$e^{-\beta_1(x-b)}$吻合。$h(x)$只依赖于β_0和β_1的值，所以与y和λ无关。令$u(x) = y(x)/h(x)$，则在端点处有:

$$u'(a) = \frac{y'(a)h(a) - y(a)h'(a)}{h^2(a)} = y'(a) + \beta_0 y(a) = 0 \tag{45}$$
$$u'(b) = \frac{y'(b)h(b) - y(b)h'(b)}{h^2(b)} = y'(b) + \beta_1 y(b) = 0 \tag{46}$$

由于$y=hu$,那么

$$\int_{\mathcal{D}} \lambda y\bar{y} = -hup(hu)'\Big|_a^b + \int_{\mathcal{D}} \Big[p(hu)'(h\bar{u})' + qh^2u\bar{u}\Big]dx \tag{47}$$

$$\begin{aligned}=& - phu(h'\bar{u} + h\bar{u}')\Big|_a^b + \int_{\mathcal{D}} \Big[p(h')^2u\bar{u} + phh'(u\bar{u}' + \bar{u}u') + ph^2u'\bar{u}' \\ &+ qh^2u\bar{u}\Big]dx\end{aligned} \tag{48}$$

$$= - phh'|u|^2\Big|_a^b + \int_{\mathcal{D}} \Big[p(h')^2|u|^2 + ph^2|u'|^2 + phh'(|u|^2)' + qh^2|u|^2\Big]dx \tag{49}$$

$$= - phh'|u|^2\Big|_a^b + phh'|u|^2\Big|_a^b + \int_{\mathcal{D}} [p(h')^2 + qh^2 - (phh')']|u|^2 + ph^2|u'|^2dx \tag{50}$$

$$= \int_{\mathcal{D}} [p(h')^2 + qh^2 - (phh')']|u|^2 + ph^2|u'|^2dx \tag{51}$$

$$\geq \Big\{\inf \frac{(p(h')^2 + qh^2 - (phh')')}{h^2}\Big\} \int_{\mathcal{D}} h^2|u|^2dx \tag{52}$$

$$= \Big\{\inf \frac{p(h')^2 + qh^2 - (phh')'}{h^2}\Big\} \int_{\mathcal{D}} y\bar{y}dx \tag{53}$$

故

$$\lambda \geq \inf \frac{p(h')^2 + qh^2 - (phh')'}{h^2} \tag{54}$$

□

性质(3)的证明概要：. 以下用红色标注的文字都是需要添加细节的地方，有的留给读者思考，有的暂时超出本课程范围，故省略。首先不妨假设$q>0$。定义第二个希尔伯特空间：

$$\mathcal{H}_1 = \Big\{y \in \mathcal{H} : y\text{可微且}\int_{\mathcal{D}} p|y'|^2 + q|y|^2dx < \infty, \text{且}y\text{满足边界条件}\Big\}, \tag{55}$$

不难看出$\mathcal{H}_1$ 是$\mathcal{H}$ 的一个子集。定义$\mathcal{H}_1$上的新内积$\langle .,.\rangle_1$:

$$\langle y_1, y_2\rangle_1 = \int_{\mathcal{D}} py_1'\bar{y}_2' + qy_1\bar{y}_2dx\text{。} \tag{56}$$

定义如下范数:

$$\|y\|_1 = \sqrt{\langle y, y\rangle_1}\ ,\ \|y\| = \sqrt{\langle y, y\rangle} \tag{57}$$

令

$$\lambda = \inf_{y\in\mathcal{H}_1, \|y\|=1} \|y\|_1^2 \tag{58}$$

可以证明存在$y_0 \in \mathcal{H}_1$,使得$\|y_0\| = 1$, 且$\|y_0\|_1^2 = \lambda$。y_0其实就是我们想要的第一个特征向量，接下来我们需要证明$Ly_0 = \lambda y_0$。

可以证明y_0有如下性质：

$$对任意的h \in \mathcal{H}_1,\ \langle y_0, h\rangle = 0 \Longrightarrow \langle y_0, h\rangle_1 = 0 \tag{59}$$

式(59) 是证明y_0二次可微的关键。现在我们任意取一个测试函数$f \in \mathcal{H}_1$,满足$f(a) = f(b) = 0$。首先将f 分解为$f = cy_0 + h$，满足$\langle h, y_0\rangle = 0$。然后直接验算证明：

$$-\int_{\mathcal{D}} (p\bar{f})' y_0' dx = \int_{\mathcal{D}} \Big\{ -p' y_0' \bar{f} + q y_0 \bar{f} - \lambda w y_0 \bar{f} \Big\} dx \tag{60}$$

这其实就说明了y_0二次可微，且

$$L y_0 = \lambda y_0 。\tag{61}$$

以上证明了第一个本征值和本征函数都存在。接下来考虑$\mathcal{H}_1$中和y_0垂直的子空间，记为$\mathcal{H}_1^{(1)}$。令:

$$\lambda_1 = \inf_{y \in \mathcal{H}_1^{(1)}, \|y\| = 1} \|y\|_1^2 \tag{62}$$

类似地可以证明 λ_1 就是第二个本征值，对应的有二次可微特征函数y_1。这个过程可以一直重复下去，我们可以得到$\lambda, \lambda_1, ...$,以及$y_0, y_1, ...$。我们还需要证明，随着$n \to \infty$, 这些$\lambda_n \to \infty$。以及所有这些y_n构成$\mathcal{H}$ 的完备正交基(其实也是$\mathcal{H}_1$的完备正交基)。前者可以通过比较L和拉普拉斯算子$-\Delta$证明，后者不难证明。 □